



KURS
CAŁKI OZNACZONE, NIEWŁAŚCIWE
i ZASTOSOWANIA CAŁEK

Lekcja 6
Zastosowania całki oznaczonej –
krzywe w postaci biegunowej

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Które z poniższych zastosowań całek oznaczonych nie obliczymy wzorami podanymi w Kursie?

- a) Długości łuku krzywej
- b) Pola obszaru
- c) Pola powierzchni bryły obrotowej
- d) Objętości bryły obrotowej

Pytanie 2

$$\rho = 2 \sin \varphi$$

Co oznacza w ρ powyższym równaniu krzywej?

- a) Odległość punktu od początku układu współrzędnych
- b) Kąt pomiędzy osią OX a półprostą łączącą początek układu współrzędnych z punktem
- c) Współrzędną y punktu
- d) Promień okręgu o środku w punkcie

Pytanie 3

$$\rho = \cos \varphi$$

Jaką wartość ρ otrzymamy biorąc $\varphi = \pi$?

- a) 1
- b) 0
- c) Ujemną, więc nie uzyskamy w ten sposób punktu we współrzędnych biegunowych
- d) -1 i jest możliwe zaznaczenie takiego punktu we współrzędnych biegunowych

Pytanie 4

$$\rho = 4 \cos 3\varphi - 2$$

W jaki sposób obliczyć granice całkowania potrzebne do obliczenia pola obszaru powyższej krzywej nie wykonując wykresu?

- a) Rozwiązać prawidłowo nierówność $4 \cos 3\varphi - 2 \geq 0$
- b) Rozwiązać prawidłowo nierówność $\cos 3\varphi \geq 0$
- c) Przyjąć $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 2\pi$
- d) Jest to niemożliwe

Pytanie 5

Rozwiązanie nierówności trygonometrycznej najczęściej...

- a) Odczytuje się z wykresu
- b) Obliczamy korzystając z granic całkowania
- c) Składa się z jednego lub dwóch rozwiązań
- d) Składa się z jednego przedziału

Pytanie 6

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Jeżeli podczas obliczania granic całkowania uzyskalibyśmy powyższe nierówności, jakie obszary całkowania przyjęlibyśmy?

- a) Tylko $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$
- b) Tylko $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$
- c) $\frac{\pi}{6} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{3} \vee 1\frac{1}{6}\pi \leq \varphi_2 \leq 1\frac{1}{3}\pi$
- d) $\frac{\pi}{6} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{3} \vee 1\frac{1}{6}\pi \leq \varphi_2 \leq 1\frac{1}{3}\pi \vee 2\frac{1}{6}\pi \leq \varphi_3 \leq 2\frac{1}{3}\pi$

Pytanie 7

$$\rho = 5\varphi + 1 \quad \text{dla } \varphi \in \langle 0, 7 \rangle$$

Czy możliwe jest obliczenie długości łuku krzywej danej powyżej?

- a) Nie, bo funkcja ρ nie jest funkcją trygonometryczną
- b) Tak
- c) Nie, bo granice całkowania nie są kątami

Pytanie 8

$$\rho = 5 \cos \varphi \quad \text{dla } \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Jak wyglądać będzie wzór do obliczenia pola powierzchni powstałej poprzez obrót dookoła osi OX powyższej krzywej?

a)
$$P_p = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{25 \cos^2 \varphi + 25 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

b)
$$P_p = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos \varphi 5 \sin \varphi \sqrt{25 \cos^2 \varphi + 25 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

c)
$$P_p = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin \varphi \sin \varphi \sqrt{25 \cos^2 \varphi + 25 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

d)
$$P_p = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin \varphi 5 \sin \varphi \sqrt{25 \cos^2 \varphi + 25 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Pytanie 9

W jaki sposób przechodzi się na współrzędne biegunowe ze współrzędnych kartezjańskich?

a) Stosując podstawienie
$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi \end{aligned}$$
 i wyznaczając ρ z równania

b) Przedstawiając najpierw krzywą we współrzędnych kartezjańskich w postaci jawnej

c) Wprowadzając parametr t

d) Stosując podstawienie
$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$
 i wyznaczając ρ z równania

Pytanie 10

Jak należy postępować w jakimkolwiek z zastosowań całki oznaczonej w postaci biegunowej, mając danych kilka krzywych ograniczających obszar (lub łuk) do obliczenia?

a) Wtedy rozwiązanie zadania jest niemożliwe

b) Utworzyć kilka całek, a wyniki zsumować

c) Utworzyć kilka całek, a wyniki odjąć lub zsumować

d) Narysować dokładny wykres

Część 2: ZADANIA

Oblicz pola figur ograniczonych krzywymi:

- 1) $\rho = 3\varphi$ dla $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- 2) $\rho = 3\sin \varphi$ dla $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$
- 3) $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ dla $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$
- 4) $\rho = 2\cos \varphi$
- 5) $\rho = 4\sin 2\varphi$
- 6) $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$
- 7) $x^4 + y^4 = 25(x^2 + y^2)$

Oblicz długości łuków krzywych:

- 8) $\rho = 2\varphi$ dla $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- 9) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$
- 10) $\rho = \frac{2}{1 + \cos \varphi}$ dla $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
- 11) $r = 2\cos \varphi$
- 12) $\rho = 1 + \cos \varphi$

Oblicz pola powierzchni brył utworzonych przez obrót dookoła osi OX krzywych:

- 13) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$
- 14) $\rho = 2\sin \varphi$

KONIEC