KURS

CAŁKI OZNACZONE, NIEWŁAŚCIWE

i ZASTOSOWANIA CAŁEK

Lekcja 5

Zastosowania całki oznaczonej –

krzywe w postaci parametrycznej

ZADANIE DOMOWE

Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

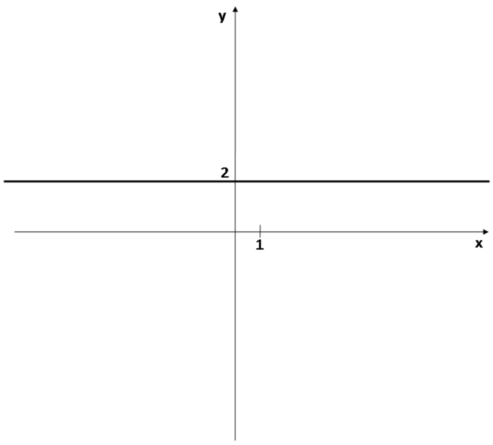
Która z poniższych krzywych przedstawiona jest w postaci parametrycznej?

a) $y^2 = \sin x \quad dla\ x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

b) $\begin{cases} x = \sin \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases} \quad dla\ \alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

c) $\rho = 4 \sin \varphi - 11 \quad dla\ \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Pytanie 2



Pozioma prosta o wykresie jak powyżej ma równanie:

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$

Pytanie 3

$$\int_{-2}^{2} |t| dt = \int_{-2}^{2} t dt$$

Czy powyższe przejście(opuszczenie wartości bezwzględnej) jest uprawnione?

a) Tak, bo wartość bezwzględna z t równa jest t
b) Nie, ponieważ zmienna t w przedziale od -2 do 2 (przedziale całkowania) przyjmuje wartości raz dodatnie, a raz ujemne
c) To zależy od wyjściowych funkcji x(t) i y(t)

Pytanie 4

W których z czterech podstawowych zastosowań całek oznaczonych niemożliwe jest użycie krzywej w postaci parametrycznej?

a) Krzywą w postaci parametryczną możemy użyć we wszystkich czterech podstawowych zastosowaniach całki oznaczonej
b) W długościach łuku
c) W objętościach bryły obrotowej
d) W polach obszaru

Pytanie 5

Podczas rozwiązywania zadań z krzywą w postaci parametrycznej często napotykamy się na duże problemy związane z obliczaniem całki nieoznaczonej. Jakiego przekształcenia można by użyć w następującym wyrażeniu $\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}$?

a) $\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \sqrt{\left(\sin^2 t\right)^3 + \left(\cos^2 t\right)^3} = \sqrt{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\left(\left(\sin^2 t\right)^2 - \sin^2 t \cos^2 t + \left(\cos^2 t\right)^2\right)}$

$= \sqrt{\left(\sin^2 t\right)^2 - \sin^2 t \cos^2 t + \left(\cos^2 t\right)^2} = \sqrt{\left(\sin^2 t\right)^2 + 2\sin^2 t \cos^2 t + \left(\cos^2 t\right)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t - \sin^2 t \cos^2 t}$

$= \sqrt{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^2 - 3\sin^2 t \cos^2 t} = \sqrt{1^2 - 3\sin^2 t \cos^2 t} = \sqrt{1 - 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2\sin t \cos t\right)^2}$

$= \sqrt{1 - 3\cdot\tfrac{1}{4}\sin^2 2t} = \sqrt{1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2t}$

b) $\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \sqrt{\left(\sin^2 t\right)^3 + \left(\cos^2 t\right)^3} = \sqrt{\left(\sin^2 t - \cos^2 t\right)\left(\left(\sin^2 t\right)^2 + \sin^2 t \cos^2 t + \left(\cos^2 t\right)^2\right)}$

$\left(\sin t - \cos t\right)\left(\sin^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t\right) = \left(\sin t - \cos t\right)\left(1 + \sin t \cos t\right)$

c) $\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \sqrt{\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^3} = \sqrt{1^3} = 1$

d) $\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \sin^3 t + \cos^3 t$

Pytanie 6

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 15t + 1 \end{cases} \quad dla\ -1 \le t \le 1$$

Czy do obliczenia objętości bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX powyższej krzywej możemy zastosować wzór $V = \pi \int_{-1}^{1} y^2(t) x'(t) dt$?

a) Tak
b) Nie, ponieważ pochodna funkcji x(t) nie jest nieujemna w całym obszarze całkowania

Pytanie 7

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad dla\ 0 \le t \le \pi$$

Czy do obliczenia objętości bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX powyższej krzywej możemy zastosować wzór $P_p = 2\pi \int_0^{\pi} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$?

a) Nie
b) Tak, ze względu na to, że sint jest funkcją nieujemną w obszarze całkowania

Pytanie 8

Jak należy postępować, mając do obliczenia krzywą i nie mając danych granic całkowania?

a) Przyjąć za granice całkowania 0 i 2π
b) Przyrównać funkcje x(t) i y(t) do zera i obliczyć układ równań
c) Przyjąć dowolne granice całkowania
d) Narysować wykres

Pytanie 9

$$\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases} \quad dla\ 0 \le t \le \infty$$

Czy jest możliwe obliczenie pola obszaru ograniczonego krzywą parametryczną, w której parametr nie zawiera się w skończonym przedziale?

a) Nie
b) Tak, ze wzoru $P = \int_0^\infty |y(t)x'(t)|\,dt$
c) Tak, po zastąpieniu niewłaściwej granicy całkowania skończoną liczbą (należy odczytać ją z wykresu)
d) Tak, ale tylko po przejściu na postać jawną

Pytanie 10

Jak należy postępować w jakimkolwiek z zastosowań całki oznaczonej w postaci parametrycznej, mając danych kilka krzywych ograniczających obszar (lub łuk) do obliczenia?

a) Wtedy rozwiązanie zadania jest niemożliwe
b) Utworzyć kilka całek, a wyniki zsumować
c) Utworzyć kilka całek, a wyniki odjąć lub zsumować
d) Narysować dokładny wykres

Część 2: ZADANIA

Oblicz pola figur ograniczonych krzywymi:

1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, 2\pi \right\rangle$

2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, \sqrt{3} \right\rangle$

3) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \sin t, \quad y = \cos^2 t \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

5) $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases}$

Oblicz długości łuków krzywych:

6) $\begin{cases} x = 2t\cos t + (t^2 - 2)\sin t \\ y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, \pi \right\rangle$

7) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right\rangle$

8) $\begin{cases} x = 5\cos t(1 + \cos t) \\ y = 5\sin t(1 + \cos t) \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, 2\pi \right\rangle$

9) $\begin{cases} x(t) = e^t \sin t \\ y(t) = e^t \cos t \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Oblicz objętości brył utworzonych przez obrót dookoła osi OX krzywych:

10) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, \sqrt{3} \right\rangle$

11) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Oblicz pola powierzchni brył utworzonych przez obrót dookoła osi OX krzywych:

12) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad dla\ t \in \left\langle 0, \pi \right\rangle$

13) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad dla\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

KONIEC