



KURS
CAŁKI OZNACZONE, NIEWŁAŚCIWE
i ZASTOSOWANIA CAŁEK

Lekcja 4
Obliczanie długości łuków, objętości i pól
powierzchni brył obrotowych

ZADANIE DOMOWE

Część 1: TEST

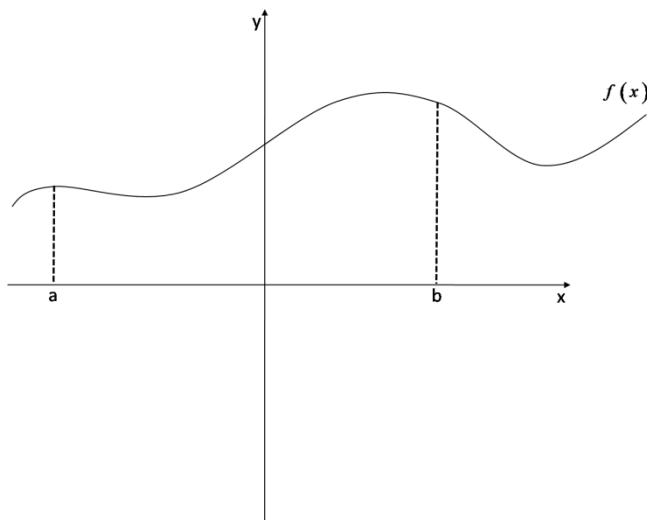
Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Jakie zastosowania geometryczne ma całka oznaczona?

- a) Obliczanie objętości, pól powierzchni brył obrotowych i przybliżonych wartości funkcji
- b) Obliczanie pól obszarów i długości łuków
- c) Obliczanie pochodnych, całek nieoznaczonych i długości łuków
- d) Obliczanie pól obszarów i pochodnych funkcji

Pytanie 2



Zadanie, w którym mamy obliczyć długość łuku z $f(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$ może przydać się nam do tego, aby...

- a) Obliczyć, ile piasku musimy wysypać, żeby zasypać pole pomiędzy wykresem funkcji $f(x)$ a osią OX
- b) Obliczyć, ile przestrzeni trzeba wygospodarować, aby krzywa mogła obracać się $f(x)$ wokół osi OX
- c) Obliczyć, jak długą drogę ma do przebycia statek płynący wzdłuż rzeki o kształcie wykresu $f(x)$
- d) Obliczyć, ile szkła będzie potrzeba do wytworzenia bombki choinkowej powstałej przez obrót krzywej $f(x)$ dookoła osi OX

Pytanie 3

Pola powierzchni których przedmiotów obliczymy korzystając ze wzoru na pole powierzchni brył obrotowych?

- a) Pola ze zbożem, krzesła, samochodu (bez kół)
- b) Podłogi w pokoju, piórnika, asfaltu na jezdni
- c) Żarówki 60W, kul śniegowych do bałwanka, garnka

Pytanie 4

Obliczenie pochodnej z danej funkcji konieczne jest w zadaniach

- a) Na długość łuku i pole powierzchni bryły obrotowej
- b) Na długość łuku, objętość i pole powierzchni bryły obrotowej
- c) Na objętość i pole powierzchni bryły obrotowej
- d) Na długość łuku i objętość bryły obrotowej

Pytanie 5

Jakim wzorem obliczylibyśmy długość krzywej $f(x) = \sqrt{x+1}$ w przedziale $-1 \leq x \leq 1$?

- a) Obliczenie długości łuku jest nie możliwe z uwagi na to, że jedna z granic całkowania jest nieujemna
- b) $L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + [\sqrt{x+1}]^2} dx$
- c) $L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]^2} dx$
- d) $L = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]^2} dx$

Pytanie 6

Jakie granice całkowania należałoby przyjąć, aby obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{2x - 4x^2}$?

- a) 0 i 2
- b) 0 i 1
- c) 0 i 4
- d) 0 i $\frac{1}{2}$



Pytanie 7

Mając do obliczenia objętość bryły obrotowej ograniczonej krzywymi

$f(x) = e^x$ $g(x) = e^{-x}$ $h(x) = e$ (bez danych granic całkowania) co należałoby wykonać?

- Zadanie niemożliwe do wykonania
- Rozwiązać równanie $e^x = e^{-x}$
- Wykonać wykres
- Podstawić do wzoru na objętość e^x jako funkcję ograniczającą z góry, a e^{-x} jako funkcję ograniczającą z dołu

Pytanie 8

Mając do obliczenia objętość bryły obrotowej ograniczonej krzywą $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$ co należałoby wykonać?

- Obliczyć pochodną funkcji
- Obliczyć granice całkowania
- Obliczyć dziedzinę funkcji
- Podstawić od razu do wzoru na objętość bryły obrotowej

Pytanie 9

Jakim wzorem obliczylibyśmy powierzchnię jeziora?

- Wzorem na pole powierzchni bryły obrotowej
- Wzorem na pole obszaru
- Wzorem na objętość bryły obrotowej
- Wzorem na długość łuku

Pytanie 10

Jakim wzorem obliczyć można objętość bryły obrotowej krzywej $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $0 \leq x \leq \infty$?

a) $V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

- b) Jest to niemożliwe, ze względu na nieskończoność w granicach całkowania

Część 2: ZADANIA

Oblicz długości łuków krzywych:

1) $y = 2\sqrt{2}x$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$

2) $y = 2\sqrt{x^3}$ dla $x \in \langle 0, \frac{8}{9} \rangle$

3) $9y^2 = 4x^3$ dla $x \in \langle 0, 3 \rangle$ (Wskazówka: wyznacz najpierw y , potem policz długości łuków obu powstałych w ten sposób krzywych, a wyniki dodaj. Można też narysować wykres.)

4) $y = \ln 1 - x^2$ dla $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

5) $y = \ln \sin x$ dla $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$

6) $y = \sqrt{4 - x^2}$

7) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

8) $y = \frac{1}{2} e^x + e^{-x}$ dla $0 \leq x \leq 1$

Oblicz objętości brył utworzonych przez obrót dookoła osi OX krzywych:

9) $y_1 = 1 - x^2$ $y_2 = x^2 + 2$

10) $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = 3x - 1$

11) $y = \frac{1}{x-1}$ dla $x \in \langle 2, 4 \rangle$

12) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ dla $x \in \langle 3, 4 \rangle$

13) $y = \operatorname{tg} x$ dla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

14) $y = \frac{1}{x}$ dla $x \in \langle 1, \infty \rangle$

Oblicz pola powierzchni brył utworzonych przez obrót dookoła osi OX krzywych:

15) $y = \sqrt{x+2}$ dla $x \in \langle 1, 2 \rangle$

16) $y = 2x^3$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$

17) $y = \frac{1}{x-1}$ dla $x \in \langle 2, 4 \rangle$

KONIEC