



# KURS GRANICE

## Lekcja 1

Wprowadzenie do granic ciągów.

Wyciąganie przed nawias największej potęgi.

### ZADANIE DOMOWE

## Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

### Pytanie 1

Granice czego można liczyć?

- a) Funkcji i ciągów
- b) Ciągów skończonych
- c) Ciągów i liczb
- d) Ciągów i osi liczbowych

### Pytanie 2

$$a_n = 1 - n^2$$

Jaki jest czwarty wyraz tego ciągu?

- a) 4
- b)  $n=4$
- c) -15
- d) 17

### Pytanie 3

$$|a_n - g|$$

Co oznacza powyższe wyrażenie w definicji granicy ciągu?

- a) Odległość wyrazu ciągu od granicy ciągu
- b) Dowolnie mały  $\varepsilon$
- c) Zbliżanie się do granicy
- d) Odległość numeru ciągu od granicy ciągu



#### Pytanie 4

Jeżeli w wyniku obliczania granicy ciągu wyjdzie nam  $\infty$ , oznacza to, że...

- a) Granica tego ciągu nie istnieje
- b) Ciąg ma granicę niewłaściwą  $\infty$
- c) Ciąg jest arytmetyczny i rosnący
- d) Ciąg może być malejący

#### Pytanie 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Jaka jest granica powyższego ciągu?

- a)  $\infty$
- b) 0
- c) 1
- d) 2

#### Pytanie 6

Co oznaczają symbole nieoznaczone w granicach ciągu?

- a) Że ciąg przed przekształceniem nie osiąga żadnej granicy
- b) Że nie wiemy do czego zmierza ciąg i musimy jakoś go przekształcić
- c) Że ciąg przed przekształceniem rozbiega do  $\infty$
- d) Że ciąg zbiega do 0, albo rozbiega do  $\infty$

**Pytanie 7**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - n + 5} \right)$$

Jak wyglądać będzie powyższy ciąg po wyciągnięciu największych potęg przed nawias?

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 \left( 3 + \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( 4 - \frac{n}{n^2} + \frac{5}{n^2} \right)} \right)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 \left( \frac{2n}{3n^2} - \frac{1}{3n^2} \right)}{4n^2 \left( -\frac{n}{4n^2} + \frac{5}{4n^2} \right)} \right)$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \left( 3n + \frac{2n}{n} - \frac{1}{n} \right)}{n \left( 4n - \frac{n}{n} + \frac{5}{n} \right)} \right)$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 \left( 3n + \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( 4n - \frac{n}{n^2} + \frac{5}{n^2} \right)} \right)$

**Pytanie 8**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \right)$$

Jak wyglądać będzie licznik powyższego wyrażenia po wyciągnięciu największej potęgi przed nawias?

a)  $n^2 \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right)$

b)  $n^2 \left( \frac{1}{n^2} + 1 \right)$

c)  $n^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$

d)  $n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$

**Pytanie 9**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5} + \sqrt{n^2 - 4}}{n + 11} \right)$$

Jak należy przekształcić licznik w powyższym wyrażeniu w tym momencie zadania?

- a) Wyciągnąć przed nawias w całym liczniku największą potęgę, czyli  $n^3$
- b) Wyciągnąć przed nawias w całym liczniku  $n$
- c) Wyciągnąć największe potęgi pod pierwiastkami przed nawias
- d) Podzielić licznik i mianownik przez  $n^3$

**Pytanie 10**

$$(n-1)!$$

Jak rozpisać można powyższą silnię?

- a)  $(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1$
- b)  $(n-1)! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1$
- c)  $(n-1)! = (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1$
- d)  $(n-1)! = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1}{n-1}$

## Część 2: ZADANIA

### Zad.1

Wyznacz następujące granice:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{4}{n} \right)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{n^2 + 5} \right)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{n + \sqrt{n}} - 1 \right)$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 13)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n - 11}{4n + 5} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 5}{n^2} \right)$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 5n + 5} \right)$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3}{4n^3 + 4n^2 + 8n + 16} \right)$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - n^4}{n^4 + 1} \right)$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n + 2}{n^2 - n} \right)$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{13n + 1}{52n}}$$

$$12) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 2 + n}{1 + 2n - n^2} \right)^4$$

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n^2 - 2n + 5}{5n^2 + 4n + 3} \right)$$

$$14) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-7n^5 - 6n^4 + 122n^3 - 15n^2 + 7n - 2}{21n^5 + 12n^3 - 501} \right)$$

$$15) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - 1)(2n + 2)}{n^2}$$

$$16) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)^2}{3n+7}$$

$$17) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(3n-1)(3n+2)}{n^2-1}}$$

$$18) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-3}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$19) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2-1} + \sqrt{n^2+3n+3}}{\sqrt[3]{2n^3-1}}$$

$$20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n}$$

$$21) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n + 10^n}{11^n + 5^n}$$

$$22) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+2} + 6^{n-2} + 3}{8^{n+2} + 4^{n-1} + 2^{2n+3}}$$

$$23) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} - 3^{2n+1}}{10^{n-1} + 1}$$

$$24) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! + (n+2)!}$$

$$25) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2 + 3n - 1}$$

KONIEC